

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА СИСТЕМЕ ЖЕСТКИХ ЭКРАНОВ МЕТОДОМ ГАЛЕРКИНА¹

Аннотация.

Актуальность и цели. Цель работы – численное исследование скалярной задачи рассеяния плоской акустической волны препятствием сложной формы, состоящим из системы бесконечно тонких акустически жестких экранов.

Материалы и методы. Задача рассматривается в квазиклассической постановке; исходная краевая задача для уравнения Гельмгольца в неограниченном пространстве сводится к системе интегральных уравнений по ограниченному многообразиям размерности 2. Для нахождения численного решения задачи применяется метод Галеркина с использованием финитных кусочно-линейных базисных функций.

Результаты. Разработан и программно реализован численный метод решения системы интегральных уравнений скалярной задачи дифракции, проведен ряд вычислительных экспериментов.

Выводы. Предложенный численный метод является эффективным способом приближенного решения задач дифракции на экранах сложной формы; он может применяться и для решения более широкого круга задач.

Ключевые слова: скалярная задача дифракции, интегральные уравнения, жесткие экраны, метод Галеркина

N. V. Romanova, A. A. Tsupak

SOLVING OF THE PROBLEM OF ACOUSTIC WAVE DIFFRACTION ON A SYSTEM OF HARD SCREENS BY THE GALERKIN METHOD

Abstract.

Background: The aim of this work is to numerically study the scalar problem of flat acoustic wave scattering by an obstacle of complex shape consisting of infinitely thin acoustically hard screens.

Material and methods. The problem is considered in the quasiclassical statement; the original boundary value problem for the Helmholtz equation in unbounded space is reduced to a system of integral equations over bounded manifolds of dimension 2. To find the numerical solution to the problem of diffraction, the Galerkin method is applied using piecewise linear basis functions.

Results. The projection method for solving the system of integral equations of the scalar diffraction problem was developed and implemented; several computational experiments were performed.

Conclusions. The proposed numerical method is an effective way to find approximate solutions to the scalar problems of diffraction on hard screens of arbitrary shape; it can also be used to solve problems of a wider range.

Key words: scalar diffraction problem, integral equations, acoustically hard screens, Galerkin method

¹Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда, проект № 14-11-00344

Введение

В работе применен метод интегральных уравнений для численного исследования скалярной задачи дифракции плоской волны на системе, состоящей из нескольких плоских акустически жестких экранов произвольной формы.

Различные задачи дифракции акустических волн уже неоднократно исследовались авторами как теоретически [1–4] (рассматривались вопросы существования, единственности, гладкости решений соответствующих краевых задач и интегральных уравнений), так и численно [5].

Для нахождения приближенных решений рассматриваемой задачи применяется метод Бубнова – Галеркина с выбором кусочно-линейных базисных функций. Для таких функций доказана выполнимость условия аппроксимации. Кроме того, простота базисных функций позволяет без труда обосновать и программно реализовать численный метод для решения задач рассеяния на плоских тонких экранах сложной формы, а также системе непересекающихся экранов. В работе приведено описание базисных функций; приведены расчетные формулы матричных элементов согласно методу Галеркина; приведены результаты расчетов для различных рассеивающих структур.

1. Постановка краевой задачи

Пусть M – гладкое (класса C^∞) двумерное многообразие без края в \mathbb{R}^3 , а $\bar{\Omega}_j$ – его подмногообразия с краем такие, что $\bar{\Omega}_j \cap \bar{\Omega}_i$ при $i \neq j$. Определим экраны $\Omega_j = \bar{\Omega}_j \setminus \partial\Omega_j$, где $\partial\Omega_j$ – край j -го подмногообразия, экран $\Omega = \cup \Omega_j$ и трубчатые окрестности его края $\partial\Omega = \cup \partial\Omega_j$:

$$\partial\Omega_\delta := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \text{dist}(x, \partial\Omega) < \delta \right\}.$$

Предполагаем, что на экране Ω определено некоторым образом поле нормалей \mathbf{n} . Пусть также M_+, M_- – области, внешняя и внутренняя по отношению к M . Всюду ниже приняты обозначения: $M^C := \mathbb{R}^3 \setminus M$, $u_{\mathbf{n}} := \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ – производная в направлении единичного вектора нормали \mathbf{n} , k_e – волновое число свободного пространства.

Задача дифракции плоской волны

$$u_0(x) = e^{ik_e(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3)}, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

где вектор $(\alpha, \beta, \gamma)^T$ задает направление падения волны $u_0(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1)$, на системе экранов Ω состоит в определении полного поля $u = u(x)$:

$$u \in C^2(\bar{\Omega})^c \bigcap_{\delta > 0} C(\bar{M}_+ \setminus \partial\Omega_\delta) \bigcap_{\delta > 0} C(\bar{M}_- \setminus \partial\Omega_\delta), \quad (1)$$

удовлетворяющего уравнению Гельмгольца вне экрана

$$\Delta u + k_e^2 u = 0, \quad x \in (\overline{\Omega})^c; \quad (2)$$

краевым условиям Неймана на поверхности экрана:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Omega} = 0; \quad (3)$$

условиям конечности энергии в любом ограниченном объеме пространства:

$$u \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3); \quad (4)$$

условиям излучения Зоммерфельда для рассеянного поля $u_s := u - u_0$ на бесконечности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_s}{\partial r} &= ik_e u_s + o\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{при } \text{Im } k_e = 0; \\ u_s(r) &= O\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad \text{при } \text{Im } k_e > 0; \quad r := |x| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5)$$

2. Интегральное уравнение задачи дифракции

Полное поле представим в виде

$$u = u_0 + u_1, \quad (6)$$

где u_0 – падающее поле; u_1 – поле, рассеянное жестким экраном Ω в свободном пространстве; так что $u_s = u_1$. Для поля u_1 должны выполняться условия Зоммерфельда (5).

Поле u_1 будем искать в виде интеграла типа потенциала двойного слоя

$$u_1(x) = \int_{\Omega} G_{\mathbf{n}_y}(r) \varphi(y) ds_y,$$

где $G(r) = \frac{1}{4\pi r} e^{ik_e r}$, $r = |x - y|$ – функция Грина уравнения Гельмгольца, а φ – неизвестная поверхностная плотность.

Представление поля вне экрана имеет вид

$$u(x) = u_0(x) + \int_{\Omega} G_{\mathbf{n}_y}(r) \varphi(y) ds_y, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Далее, помещая точку x на экран Ω и используя краевое условие (3), получаем

$$-\left(\int_{\Omega} G_{\mathbf{n}_y}(r) \varphi(y) ds_y \right)_{n_x} = u_{0,n_x}(x), \quad x \in \Omega. \quad (7)$$

Перепишем интегральное уравнение в операторном виде:

$$S\varphi = u_{0, \mathbf{n}_x} | \Omega. \quad (8)$$

Интегральный оператор определяется согласно выведенному уравнению:

$$S\varphi = - \left(\int_{\Omega} G_{\mathbf{n}_y}(r) \varphi(y) ds_y \right)_{\mathbf{n}_x} = - \int_{\Omega} G_{\mathbf{n}_y, \mathbf{n}_x}(r) \varphi(y) ds_y,$$

S – гиперсингулярный оператор на поверхности Ω . Будем рассматривать данный оператор как псевдодифференциальный в следующих пространствах:

$$S : \tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega}) \rightarrow H^{-1/2}(\Omega),$$

где соболевские пространства на многообразиях с краем определяются стандартным образом:

$$\tilde{H}^s(\bar{\Omega}) = \{u \in H^s(M) : \text{supp } u \subset \bar{\Omega}\}, \quad H^s(\Omega) = \{u |_{\Omega} : u \in H^s(M)\}.$$

3. Метод Галеркина

Рассмотрим формулировку метода Галеркина для решения операторного уравнения

$$Sf = g, \quad S : H \rightarrow H^*,$$

где $H = \tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega})$, $H^* = H^{-1/2}(\Omega)$. Пространство $H^{-1/2}(\Omega)$ антидвойственно к $\tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega})$ относительно полуторалинейной формы $(\phi, \varphi) = \int_{\Omega} \phi \bar{\varphi} ds$, определяющей соотношение антидвойственности.

Приближенное решение φ_N уравнения (8) будем искать в виде

$$\varphi_N(x) := \sum_{j=1}^N c^j \zeta_j(x), \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (9)$$

Здесь $\zeta_j(x)$ – базисные функции, c^j – неизвестные коэффициенты.

В качестве базисных функций $\zeta_i := \zeta_{i_1, i_2}$ ($i_k = 0, \dots, l_k - 1$) на плоском экране Ω , перпендикулярном оси $0x_3$, рассмотрим кусочно-линейные функции с шестиугольными носителями [6, с. 109].

Пусть Ω – ограниченный плоский экран (или система попарно непересекающихся экранов), погруженный в прямоугольник $\Pi := [0, a] \times [0, b]$. Разобьем Π равными прямоугольниками Π_{i_1, i_2} , каждый из которых в свою очередь разделим пополам диагоналями одинакового всюду направления (как это сделано на рис. 1). Носитель базисной функции $\zeta_i := \zeta_{i_1, i_2}$ будет представлять собой объединение шести треугольников с общей точкой (x_{1, i_1}, x_{2, i_2}) .

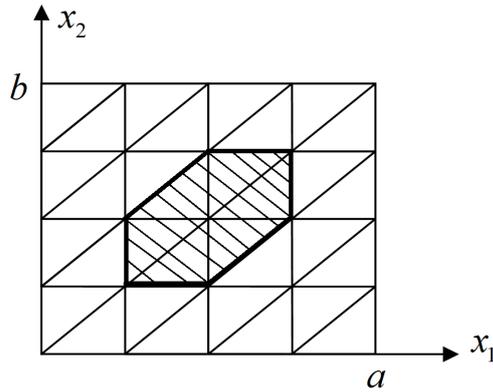


Рис. 1. Носитель базисной функции

Тогда $\zeta_{i_1, i_2}(x_1, x_2) = \zeta(x_1/h_1 - i_1, x_2/h_2 - i_2)$ (рис. 2), где

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} 1-x, & x \in [0, 1], & y \in [0, x], \\ 1-y, & x \in [0, 1], & y \in [x, 1], \\ 1+x-y, & x \in [-1, 0], & y \in [0, x+1], \\ 1+x, & x \in [-1, 0], & y \in [x, 0], \\ 1+y, & x \in [-1, 0], & y \in [-1, x], \\ 1-x+y, & x \in [0, 1], & y \in [x-1, 0], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

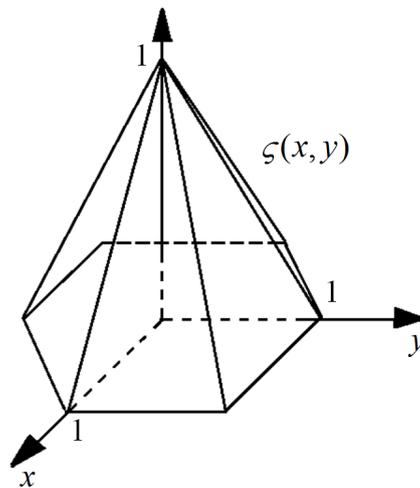


Рис. 2. График функции ζ

Так как оператор S является эллиптическим в смысле неравенства Гординга [7], а для выбранных базисных функций выполняется условие аппроксимации [2], то верна следующая теорема.

Теорема. Метод Галеркина с выбором базисных функций ζ_i сходится для оператора S .

4. Вычисление матричных элементов в методе Галеркина

Неизвестные коэффициенты c^j в разложении (9) будем искать из системы линейных алгебраических уравнений

$$[L]\mathbf{u} = \mathbf{u}_0,$$

где $\mathbf{u} = (c^1, \dots, c^N)^T$ – вектор-столбец неизвестных коэффициентов; $[L]$ – основная матрица СЛАУ, $\mathbf{u}_0 = (f^1, \dots, f^N)^T$ – столбец правой части.

Элементы правой части вычислим согласно методу Галеркина по формуле

$$f^I = (f, \zeta_I),$$

где

$$f(x_1, x_2) = \frac{\partial u_0(x_1, x_2, x_3)}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Omega} = \frac{\partial u_0(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} \Big|_{\Omega} = \frac{\partial u_0(x_1, x_2, x_3^0)}{\partial x_3}$$

в силу геометрии задачи (Ω – плоский и $\Omega \perp O x_3$). Окончательно имеем

$$f^I = f^{i_1 i_2} = \int_{\Omega} \frac{\partial u_0(x_1, x_2, x_3^0)}{\partial x_3} \zeta_{i_1 i_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Элементы основной матрицы вычисляются по формуле

$$\begin{aligned} A_{IJ} &= - \iint_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial y_3} G(x_1, x_2, x_3^0, y_1, y_2, y_3^0) \zeta_I(x') \zeta_J(y') dx' dy' = \\ &= \iint_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial x_x^2} G(x_1, x_2, x_3^0, y_1, y_2, y_3^0) \zeta_I(x') \zeta_J(y') dx' dy', \end{aligned} \quad (10)$$

где $x' = (x_1, x_2)$, $y' = (y_1, y_2)$, а параметры x_3^0, y_3^0 определяются высотой, на которой относительно плоскости Ox_1x_2 расположен экран Ω .

Так как в (10) ядро интеграла имеет особенность вида

$$\frac{1}{|x - y|^3},$$

то прямое вычисление такого интеграла затруднительно.

По определению функции Грина имеем

$$(\Delta + k_e^2) G(x, y) = -\delta(x - y).$$

Тогда

$$\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} G(x, y) = -\delta(x-y) - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} G(x, y) - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} G(x, y) - k_e^2 G(x, y),$$

а элементы основной матрицы представляются в виде

$$A_{IJ} = A_{IJ}^{(1)} + A_{IJ}^{(2)} + A_{IJ}^{(3)} + A_{IJ}^{(4)},$$

где

$$A_{IJ}^{(1)} = - \iint_{\Omega} \zeta_J(x') \zeta_I(x') dx',$$

$$\begin{aligned} A_{IJ}^{(2)} &= - \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial x_1^2} \zeta_I(x') \zeta_J(x') dx' dy' = \\ &= \iint_{\Omega \Omega} \frac{\partial G(x, y)}{\partial x_1} \frac{\partial \zeta_I(x')}{\partial x_1} \zeta_J(x') dx' dy' = \\ &= \iint_{\Omega \Omega} - \frac{\partial G(x, y)}{\partial y_1} \frac{\partial \zeta_I(x')}{\partial y_1} \zeta_J(x') dx' dy' = \\ &= \iint_{\Omega \Omega} G(x, y) \frac{\partial \zeta_I(x')}{\partial x_1} \frac{\partial \zeta_J(x')}{\partial y_1} dx' dy', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{IJ}^{(3)} &= - \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial x_2^2} \varphi_I(x') \varphi_J(x') dx' dy' = \\ &= \iint_{\Omega \Omega} \frac{\partial G(x, y)}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_I(x')}{\partial x_2} \varphi_J(y') dx' dy' = \\ &= \iint_{\Omega \Omega} - \frac{\partial G(x, y)}{\partial y_2} \frac{\partial \varphi_I(x')}{\partial y_2} \varphi_J(y') dx' dy' = \\ &= \iint_{\Omega \Omega} G(x, y) \frac{\partial \varphi_I(x')}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_J(y')}{\partial y_2} dx' dy', \end{aligned}$$

$$A_{IJ}^{(4)} = k_e^2 \iint_{\Omega \Omega} G(x, y) \varphi_I(x') \varphi_J(y') dx' dy'.$$

В последних интегралах ядра имеют слабую особенность; вычисление таких интегралов известными кубатурными формулами не вызывает затруднений.

5. Описание вычислительных экспериментов и результаты расчетов

Во всех экспериментах рассматривались плоские (перпендикулярные оси Ox_3) экраны; падающее поле задается функцией $u_0 = e^{ik_e x_3}$, волновое число $k_e = 1$. На всех рисунках далее изображено абсолютное значение плотности φ на экране, в подписях ко всем рисункам указан диапазон значений модуля плотности $|\varphi|$.

На рис. 3 представлены результаты исследования зависимости приближенного решения системы интегральных уравнений от числа узлов квадратурной формулы прямоугольников. Число базисных функций на каждом экране фиксировано и равно 16. Экран определяется следующим образом:

$$\Omega = \{x : x_1, x_2 \in [0, 1], x_3 = 1\}.$$

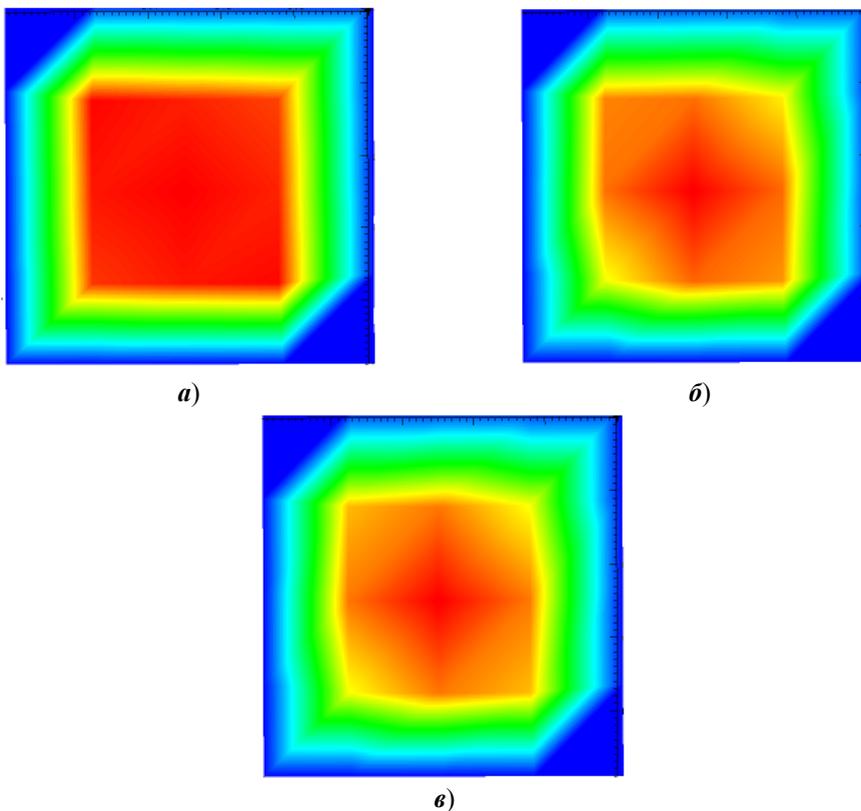


Рис. 3. Зависимость приближенного решения от точности интегрирования:
a – $m = 4, |\varphi| \in [0.25, 1.00]$; **б** – $m = 8, |\varphi| \in [0.16, 0.62]$; **в** – $m = 12, |\varphi| \in [0.16, 0.64]$

В подписях к этим рисункам указано число узлов кубатурной формулы прямоугольников по каждому измерению (оно обозначено символом m).

Видно, что при небольшом числе узлов кубатурной формулы ($m = 4$) приближенное решение существенно отличается (особенно количественно) от решений, полученных с большей точностью интегрирования.

Ниже приведены результаты решения задачи дифракции на плоских экранах сложной формы. В подписях ко всем нижеприведенным рисункам указано число разбиения квадрата $[0,1]^2$ по каждому из двух измерений, содержащего исследуемый экран. На этих рисунках можно проследить также зависимости приближенного решения системы интегральных уравнений от числа n базисных функций. Число узлов кубатурной формулы прямоугольников фиксировано и равно 10.

На рис. 4 представлены результаты решения задачи на экране типа «уголок»:

$$\Omega = \{x : 0.5 < \max(x_1, x_2) < 1, x_3 = 1\}.$$

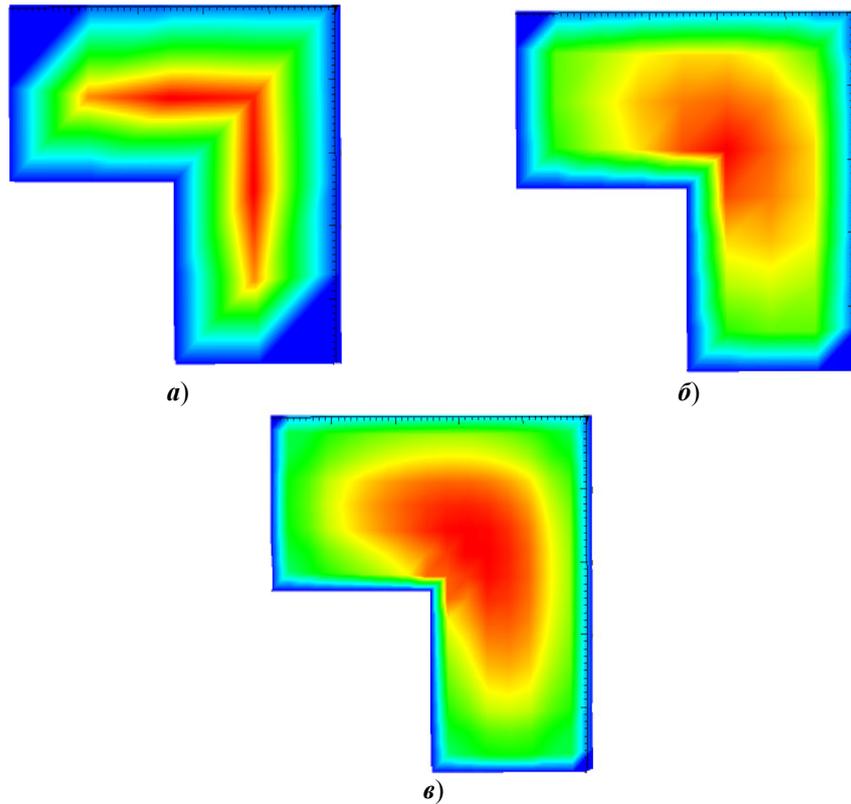


Рис. 4. Решение на экране типа «уголок»: **a** – $n = 4$, $|\varphi| \in [0.11, 0.42]$;
б – $n = 8$, $|\varphi| \in [0.09, 0.38]$; **в** – $n = 16$, $|\varphi| \in [0.09, 0.35]$

На рис. 5 представлены результаты решения задачи на круговом экране:

$$\Omega = \{x : (x_1 - 0.5)^2 + (x_2 - 0.5)^2 < 0.25, x_3 = 1\}.$$

На рис. 6 представлены результаты решения задачи на квадратном экране с ромбовидным вырезом:

$$\Omega = \{x : \max(x_1, x_2) < 1, |x_1 - 0.5| + |x_2 - 0.5| > 0.25, x_3 = 1\}.$$

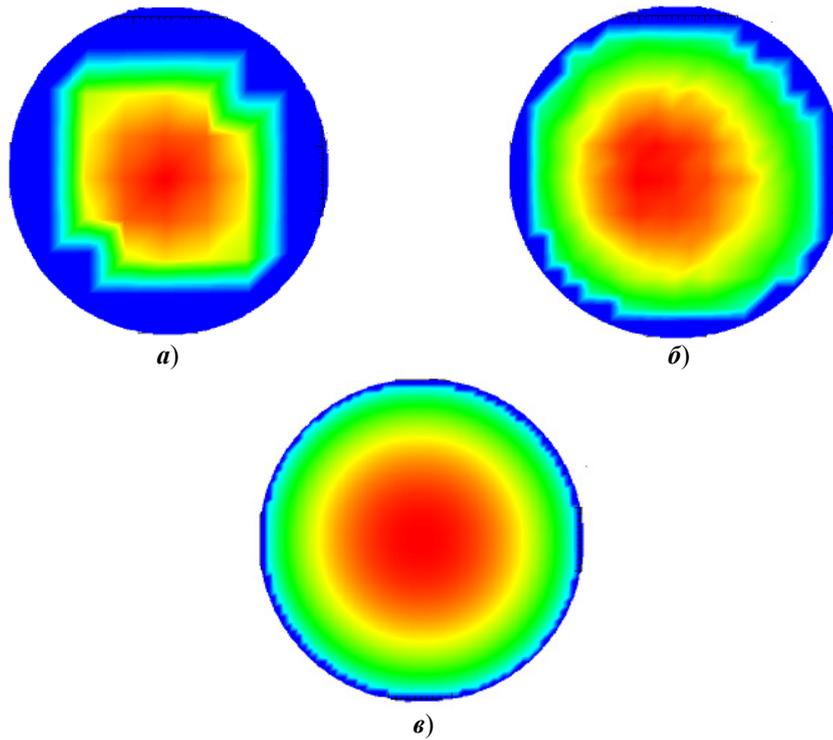


Рис. 5. Решение на экране типа «круг»: $a - n = 12, |\varphi| \in [0.08, 0.34]$;
 $b - n = 20, |\varphi| \in [0.09, 0.4]$; $в - n = 64, |\varphi| \in [0.07, 0.3]$

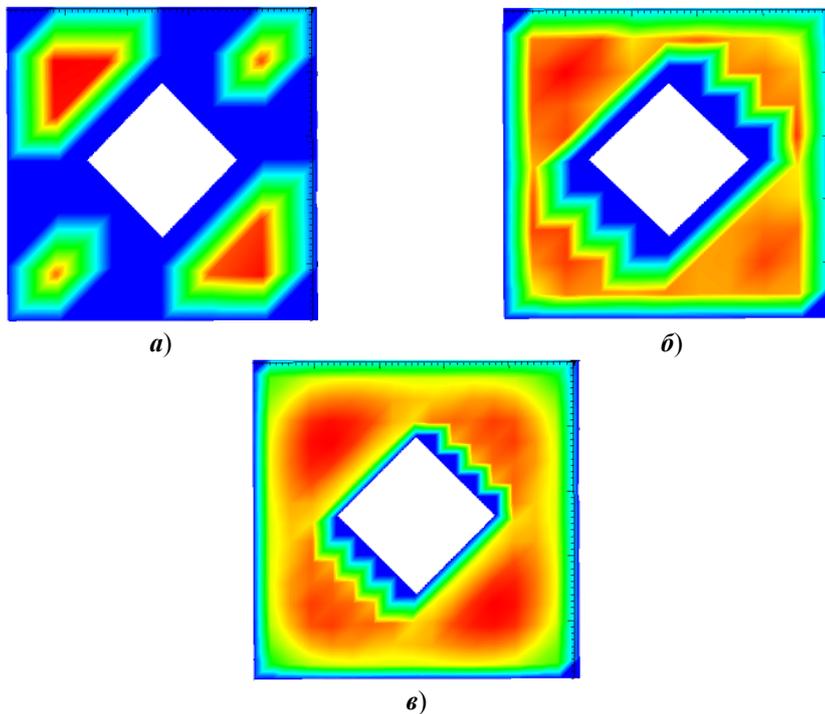


Рис. 6. Решение на экране типа «квадрат с апертурой»: $a - n = 6, |\varphi| \in [0.05, 0.18]$;
 $b - n = 10, |\varphi| \in [0.04, 0.18]$; $в - n = 16, |\varphi| \in [0.05, 0.19]$

Замечание 1. Поясним работу предлагаемого алгоритма для расчета на экранах сложной формы. При формировании матрицы последовательно (по $i_1 = 1, \dots, k_1$ и $i_2 = 1, \dots, k_2$) перебираются все базисные и тестовые функции $\zeta_{i_1 i_2}$ и учитываются лишь те из них, носители которых целиком лежат внутри экрана, точнее, когда $\text{supp } \zeta_{i_1 i_2} \subset \bar{\Omega}$. Число таких функций определяет порядок матрицы. Реализация такого алгоритма для одного экрана ничем не отличается от случая нескольких экранов (можно говорить об экране с несколькими компонентами связности).

Рисунки показывают, что для экранов сложной формы выбор достаточно большого числа базисных функций является существенно важным фактором, определяющим даже качественный вид приближенного решения, особенно для экранов с криволинейной кусочно-гладкой границей (см. результаты расчетов на рис. 7).

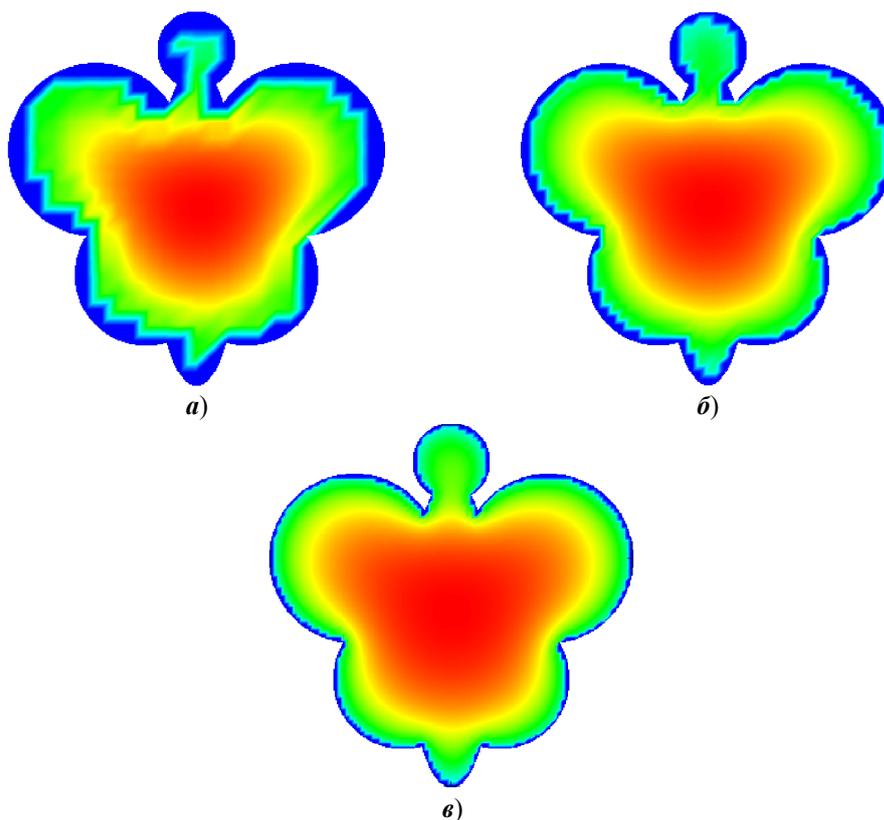


Рис. 7. Решение на экране «бабочка»:
а – $n = 32, |\varphi| \in [0, 0.13]$; **б** – $n = 64, |\varphi| \in [0, 0.09]$; **в** – $n = 128, |\varphi| \in [0, 0.08]$

Заключение

В работе рассмотрена скалярная задача дифракции на системе акустически жестких экранов. Краевая задача для уравнения Гельмгольца сведена к системе сингулярных интегральных уравнений по поверхности экранов. Для численного решения интегральных уравнений предложен метод Галер-

кина: на плоских мягких экранах введены кусочно-линейные финитные базисные функции, приведены расчетные формулы матричных элементов в методе Галеркина. Предложенный численный метод программно реализован, проведен ряд вычислительных тестов. Проведенные эксперименты подтвердили правильность реализации численного метода, его сходимость и эффективность при исследовании задач акустики на экранах произвольной формы.

Список литературы

1. **Медведик, М. Ю.** Скалярная задача дифракции плоской волны на системе непересекающихся экранов и неоднородных тел / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54, № 8. – С. 1319–1331.
2. **Смирнов, Ю. Г.** Метод интегральных уравнений в скалярной задаче дифракции, состоящей из «мягкого» и «жесткого» экранов и неоднородного тела / Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50, № 9. – С. 1164–1174.
3. **Цупак, А. А.** О единственности решения задачи дифракции акустической волны на системе непересекающихся экранов и неоднородных тел / А. А. Цупак // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – № 1 (29). – С. 30–38.
4. **Цупак, А. А.** Существование и единственность решения задачи дифракции акустической волны на объемном неоднородном теле, содержащем мягкий экран / А. А. Цупак // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 3 (35). – С. 61–71.
5. **Деревянчук, Е. Д.** Метод Галеркина решения скалярной задачи рассеяния препятствием сложной формы / Е. Д. Деревянчук, Е. Ю. Смолькин, А. А. Цупак // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – № 4 (32). – С. 57–68.
6. **Марчук, Г. И.** Введение в проекционно-сеточные методы / Г. И. Марчук, В. И. Агошков. – М.: Наука, 1981.
7. **Stephan, E. P.** Boundary integral equations for screen problems in \mathbb{R}^3 / E. P. Stephan // Integral equations and potential theory. – 1987. – Vol. 10. – P. 236–257.

References

1. Medvedik M. Yu., Smirnov Yu. G., Tsupak A. A. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Journal of calculus mathematics and mathematical physics]. 2014, vol. 54, no. 8, pp. 1319–1331.
2. Smirnov Yu. G., Tsupak A. A. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations]. 2014, vol. 50, no. 9, pp. 1164–1174.
3. Tsupak A. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskije nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2014, no. 1 (29), pp. 30–38.
4. Tsupak A. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskije nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2015, no. 3 (35), pp. 61–71.
5. Derevyanchuk E. D., Smol'kin E. Yu., Tsupak A. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskije nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2014, no. 4 (32), pp. 57–68.
6. Marchuk G. I., Agoshkov V. I. *Vvedenie v proektsionno-setochnye metody* [Introduction into projection-network methods]. Moscow: Nauka, 1981.
7. Stephan E. P. *Integral equations and potential theory*. 1987, vol. 10, pp. 236–257.

Романова Наталья Владимировна
студентка, Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Romanova Natal'ya Vladimirovna
Student, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Цупак Алексей Александрович
кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: altsupak@yandex.ru

Tsupak Aleksey Aleksandrovich
Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling, Penza
State University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

УДК 517.3

Романова, Н. В.

Решение задачи дифракции акустической волны на системе жестких экранов методом Галеркина / Н. В. Романова, А. А. Цупак // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2016. – № 2 (38). – С. 54–66. DOI 10.21685/2072-3040-2016-2-5